Ces résultats peuvent se généraliser.

Exercice 6 Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, ..., N_k de couleur c_k (on a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$). On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_1 boules de couleur c_1, n_2 de couleur c_2, ..., n_k de couleur c_k (où $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$).
Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise.

4 Union finie d'événements

Exercice 7
Montrer que si A, B et C sont trois événements d'un espace probabilisé fini, alors :
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

La formule du crible généralise ce qui précède au cas d'une union de n événements. Cette formule n'est pas explicitement au programme, mais est utile à connaître. Elle sera redémontrée à l'aide des variables aléatoires dans l'exercice 30.3 de la page 1522.

Exercice 8 (Formule du crible ou de Poincaré)
Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On veut démontrer que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right).$$

On sait que, pour tout événement A, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. En appliquant cette relation à tous les événements qui interviennent dans le membre de droite de l'égalité, on obtient une combinaison linéaire des $\mathbb{P}(\{\omega\})$ (pour $\omega \in \Omega$).

1. Soit ω un élément de Ω qui appartient à exactement $p \geqslant 1$ des sous-ensembles A_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$). Montrer que le coefficient de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k}$. Calculer cette somme.
2. Conclure.

Remarque Dans le membre de droite de l'égalité démontrée, la deuxième somme est effectuée sur toutes les listes $(i_1, \dots, i_k)$ strictement croissantes d'entiers de $[\![1, n]\!]$. En particulier, si $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ ne dépend pas des

Ces résultats peuvent se généraliser.

1 **Exercice 6** Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, ..., N_k de couleur c_k (on a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$). On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_1 boules de couleur c_1, n_2 de couleur c_2, ..., n_k de couleur c_k (où $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$).
Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise.

4 Union finie d'événements

2 **Exercice 7**

Montrer que si A, B et C sont trois événements d'un espace probabilisé fini, alors :
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

La formule du crible généralise ce qui précède au cas d'une union de n événements. Cette formule n'est pas explicitement au programme, mais est utile à connaître. Elle sera redémontrée à l'aide des variables aléatoires dans l'exercice 30.3 de la page 1522.

2 **Exercice 8 (Formule du crible ou de Poincaré)**

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On veut démontrer que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right).$$

On sait que, pour tout événement A, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. En appliquant cette relation à tous les événements qui interviennent dans le membre de droite de l'égalité, on obtient une combinaison linéaire des $\mathbb{P}(\{\omega\})$ (pour $\omega \in \Omega$).

1. Soit ω un élément de Ω qui appartient à exactement $p \geqslant 1$ des sous-ensembles A_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$). Montrer que le coefficient de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k}$. Calculer cette somme.
2. Conclure.

Remarque Dans le membre de droite de l'égalité démontrée, la deuxième somme est effectuée sur toutes les listes $(i_1, \ldots, i_k)$ strictement croissantes d'entiers de $[\![1, n]\!]$. En particulier, si $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ ne dépend pas des entiers $i_1, \ldots, i_k$, mais seulement de k, on a alors :

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

C'est le seul cas, pour une union de n ensembles, où la formule du crible peut être utilisée efficacement.

1433 **Exercice 9 (Le problème des rencontre)**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement « il n'y a aucune rencontre ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i-ème tirage ». Exprimer $\overline{E}$ en fonction des A_i.

   En déduire, en appliquant la formule du crible, que $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Remarque Le problème des rencontres peut prendre des formes variées.

1. Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?
2. Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?

III Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Supposons que l'événement A soit réalisé. Sous l'information « A est réalisé », un événement B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ est réalisé. On dira que la probabilité que B soit réalisé, sachant que A est réalisé est :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à } A \cap B}{\text{nombre de cas possibles pour } A} = \frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card} A} = \frac{\frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card} \Omega}}{\frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Par exemple, la probabilité qu'on ait obtenu un 6 en lançant un dé équilibré sachant qu'on a obtenu un nombre pair est $\frac{1}{3}$, car il y a trois numéros pairs et un seul 6.

Avec les probabilités conditionnelles apparaissent les raisonnements proprement probabilistes, ce qui précède se ramenant peu ou prou à du dénombrement.

1 Définition

Définition 8

Si A et B sont des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on appelle **probabilité de B sachant A** le réel, noté $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B \mid A)$, défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Théorème 8

Pour tout événement A de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ vérifiant $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{I\!R} \\ & B & \longmapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelée la **probabilité conditionnelle à A**.

Démonstration page 1434

Remarques

1. La probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ de B sachant A est à bien distinguer de la probabilité de l'intersection $\mathbb{P}(B \cap A)$.
   En effet, dans le calcul de la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$, on suppose implicitement que l'événement A est réalisé et on cherche la probabilité qu'alors B le soit, tandis que dans le calcul de la probabilité $\mathbb{P}(B \cap A)$, on cherche la probabilité de l'événement « B et A », où l'événement A n'est pas *a priori* réalisé.
2. La notation $\mathbb{P}(B \mid A)$ peut se révéler dangereuse en donnant à penser qu'il existe un événement conditionnel « $B \mid A$ » dont on calculerait la probabilité. Il n'existe pas d'événements conditionnels, mais seulement des probabilités conditionnelles, c'est-à-dire d'autres probabilités que $\mathbb{P}$ sur le même univers Ω.
   Il n'en reste pas moins que la notation $\mathbb{P}(B \mid A)$ est très utilisée. En effet, elle est pratique, surtout quand l'événement B est complexe et donc malaisé à mettre en indice.
   Dans cette ouvrage, nous utiliserons indifféremment les deux notations.
3. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, elle en possède toutes les propriétés. En particulier, pour tout événement B, on a $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

Exercice 10 On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.
Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ? Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

2 Formule des probabilités composées

Le plus souvent, on ne calcule pas $\mathbb{P}_A(B)$ à partir de $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)$. Au contraire, c'est la connaissance de $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A)$ qui permet le calcul de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Réécrivons donc la définition 8 de la page 1414.

Proposition 9

Pour tous événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(A) \neq 0\,;$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(A) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

Exercice 11 Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

La formule précédente se généralise à l'intersection de n événements.

Théorème 10 (Formule des probabilités composées)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Principe de démonstration. Le produit de droite est télescopique.

Démonstration page 1434

Remarque Cette formule est utilisée en particulier quand les événements A_1, $A_2, \ldots$, A_n suivent un ordre chronologique.

Exercice 12 Une urne contient n boules dont b blanches et r rouges, indiscernables au toucher où $r \geqslant 4$. On tire quatre boules successivement et sans remise de cette urne.

1. Quelle est la probabilité que les quatre boules tirées soient rouges ?
2. Soit $k \in [\![1, r+1]\!]$. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au k-ième tirage ?

Exercice 13 Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan. Au départ, elle est en A. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle fait un saut : si elle est en A, elle va en B ; si elle en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$; si elle est en C, elle y reste.

1. Montrer que la puce ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.
2. Calculer la probabilité que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

3 Formule des probabilités totales

Commençons par un cas particulier important correspondant au cas où le système complet d'événements est $(A, \overline{A})$.

Théorème 11

Pour tous événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}).$$

Si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A) + P_{\overline{A}}(B)\,\mathbb{P}(\overline{A}).$$

Démonstration. La première égalité résulte de la proposition 5 de la page 1409, car $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
Si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, alors A et $\overline{A}$ sont de probabilité non nulle, donc :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\,\mathbb{P}(\overline{A}),$$

d'où découle la deuxième égalité. □

Exercice 14 Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, représentant 20% de la population, et ceux qui ont peu d'accidents. Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est 0,5 ; pour la deuxième catégorie, cette probabilité est 0,1.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Point méthode

Le théorème 11 est utilisé en particulier avec $A = A_{n-1}$ et $B = A_n$, dans le cas d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements pour laquelle on connaît $\mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})$ et $\mathbb{P}(A_n \mid \overline{A}_{n-1})$.

On détermine ainsi une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(A_{n-1})$ et $\mathbb{P}(A_n)$.

Exemple Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de fonctionner à la date n ;
- s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être en panne à la date n,

où (a, b) est un couple de réels de $]0, 1[$.
On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.
On veut déterminer p_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

- Pour déterminer une relation de récurrence entre p_{n-1} et p_n, on applique la formule des probabilités totales. On a, si $0 < \mathbb{P}(M_{n-1}) < 1$:
$$\mathbb{P}(M_n) = \mathbb{P}(M_n \mid M_{n-1})\mathbb{P}(M_{n-1}) + \mathbb{P}(M_n \mid \overline{M}_{n-1})\mathbb{P}(\overline{M}_{n-1}).$$
Par hypothèse :
$$\mathbb{P}(M_n \mid M_{n-1}) = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\overline{M}_n \mid \overline{M}_{n-1}) = b,$$
d'où $\mathbb{P}(M_n \mid \overline{M}_{n-1}) = 1 - b$. On obtient donc :
$$p_n = ap_{n-1} + (1-b)(1-p_{n-1}) = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b.$$
Cette égalité reste vérifiée si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 0$, car dans ce cas *a fortiori* $\mathbb{P}(M_n \cap M_{n-1}) = 0 = ap_{n-1}$ et de même si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 1$.
- La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. La limite éventuelle est $\ell = \dfrac{1-b}{2-a-b}$ ($a+b \neq 2$ car a et b sont des réels de $]0,1[$). La suite $(p_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $a+b-1$.
On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n - \ell = (a+b-1)^n(p_0 - \ell)$, c'est-à-dire
$$p_n = \frac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^n \frac{1-a}{2-a-b}.$$
Comme $a + b - 1 \in]-1, 1[$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

Théorème 12 (La formule des probabilités totales)

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tout événement B, on a :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$
Si, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, on obtient :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. La première égalité a été démontrée dans la proposition 5 de la page 1409. Si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors on peut écrire $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)$. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i).$$

□

Remarque La formule peut s'appliquer s'il existe i tel que $\mathbb{P}(A_i) = 0$, en faisant la convention qu'alors $\mathbb{P}(B \mid A_i) = 0$, car le terme correspondant de la somme qui est égal à $\mathbb{P}(B \cap A_i)$ est nul *a fortiori*.

Point méthode

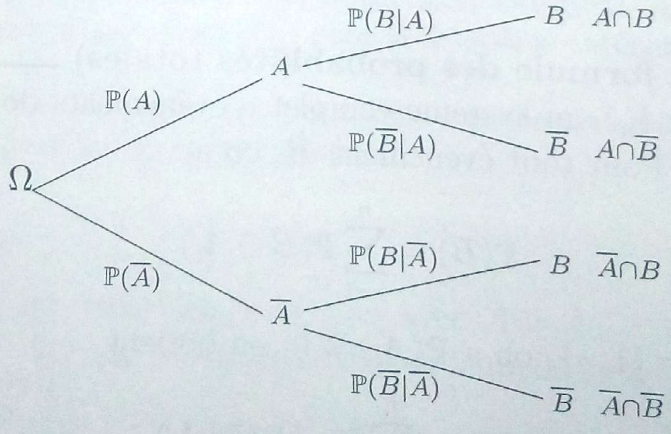
Cette formule, qui est d'une grande importance, doit être utilisée en particulier quand l'expérience se déroule en plusieurs étapes et que la première aboutit à plusieurs résultats incompatibles entre eux et donnant un système complet d'événements.

Exercice 15 Soit n un entier naturel non nul. Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés $2, \ldots, n$ jetons numérotés n. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On tire un jeton dans $\mathcal{U}$; si le jeton tiré porte le numéro i, on prélève une boule dans l'urne numéro i.

Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

Arbres de probabilité

En terminale, a été prise l'habitude d'illustrer les probabilités conditionnelles à l'aide d'arbres de probabilité (appelés aussi arbres pondérés).



Sur un tel arbre, les embranchements correspondent à des événements ; la racine de l'arbre correspond à l'événement certain, qu'on sous-entend en général. On parcourt un tel arbre de la racine vers l'extrémité des branches. Sur chaque branche, on note la probabilité de l'événement qui figure à son extrémité, conditionnelle à la conjonction des événements qui figurent entre la racine de l'arbre et son origine.
Chaque chemin correspond à la conjonction des événements rencontrés. Par exemple sur l'arbre de la page ci-contre, les quatre chemins possibles correspondent aux événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. D'après la formule des probabilités composées, la probabilité affectée à chaque chemin est le produit des probabilités rencontrées.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent. Sur la figure de la page précédente, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B \mid \overline{A}),$$

ce qui résulte de la formule des probabilités totales.
Si un arbre peut illustrer la situation, il ne saurait tenir lieu de démonstration. La démonstration consiste à appliquer la formule des probabilités totales.

4 Formule de Bayes

Proposition 13

Pour tous événements A et B de probabilité non nulle de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A \mid B).$$

□

Point méthode

Cette formule, souvent appelée **formule de probabilité des causes**, permet en quelque sorte « de remonter le temps ». En effet, si l'événement B se produit après l'événement A, elle nous permet de déduire, de la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ qui respecte la chronologie, la probabilité $\mathbb{P}_B(A)$ qui, elle, remonte cette chronologie.

37 **Exercice 16** On reprend l'exemple de l'exercice 15 de la page 1418. Quelle est la probabilité que la boule soit tirée de l'urne n sachant qu'elle est blanche ?

En général, pour exprimer $\mathbb{P}(B)$, on utilise la formule des probabilités totales.
On obtient le théorème suivant.

Théorème 14 (Formule de Bayes)

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$.
Pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a, pour tout i de $[\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}.$$

En particulier, pour tous événements A et B tels que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Démonstration. Le dénominateur du membre de droite de la première égalité est $\mathbb{P}(B)$, en vertu de la formule des probabilités totales (théorème 12 de la page 1417). Il s'agit donc de démontrer que $\mathbb{P}(A_i \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(A)}$, ce qui résulte de la proposition 13 de la page précédente. La dernière égalité est un cas particulier de la première, où le système complet d'événements est $(A, \overline{A})$. □

37 **Exercice 17** Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.
On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Commenter.

38 **Exercice 18** Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que cet étudiant connaisse la réponse à la question est $p \in]0, 1[$.
Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

IV Indépendance

1 Indépendance entre deux événements

Définition 9

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarques

1. Cette relation ne dépend pas de l'ordre des événements : si A et B sont indépendants, il en est de même de B et A.
2. Si A est un événement de probabilité nulle, alors A et tout autre événement B sont indépendants.

   En effet $A \cap B \subset A$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 15

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que A ait une probabilité non nulle sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Démonstration. Par définition de la probabilité conditionnelle, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, donc l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ équivaut à $P_A(B) = \mathbb{P}(B)$. □

Remarque Ainsi, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si la probabilité de B et sa probabilité conditionnelle à A sont égales : la réalisation de A n'influe pas sur celle de B. La notion d'indépendance vise à modéliser cette absence d'influence de la réalisation de l'un des événements sur celle de l'autre.

Exemples

1. On lance deux dés. On considère les événements A « le premier dé donne un numéro pair » et B « le deuxième dé donne 3 ». On choisit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme.

   On trouve $\operatorname{card} A = 3 \times 6 = 18$ et donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{card} B = 6$ et donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Comme $A \cap B = \{(2,3), (4,3), (6,3)\}$, on obtient :

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

   Les événements A et B sont indépendants.
2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements A « la carte est une dame » et B « la carte est un cœur ». L'ensemble Ω des 52 cartes est muni de la probabilité uniforme. On obtient $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{52}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{13}{52}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$ (la carte tirée est la dame de cœur). Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$: les événements A et B sont indépendants.

Remarques

1. On veillera à ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général . En effet, si A et B sont incompatibles, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et A et B ne sont pas indépendants.
2. Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste. Elle dépend de la probabilité dont est muni Ω.

Exemple Une pièce de monnaie est lancée deux fois et l'on choisit $\Omega = \{P, F\}^2$. On considère les événements A « les deux lancers ne donnent pas le même résultat » et B « le deuxième lancer donne face ».

- Si cette pièce est parfaitement équilibrée, on munit l'univers Ω de la probabilité uniforme. On obtient $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $A \cap B = \{(P, F)\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$: les événements A et B sont indépendants.
- Si cette pièce est pipée et qu'elle tombe sur pile avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(F, P)\}\big) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(\{(F, F)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

  Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Remarque Mis à part le cas où l'on construit l'espace probabilisé pour qu'ils le soient, il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants.

Proposition 16

Si A et B sont deux événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration page 1438

Remarque On peut déduire de cette proposition que, si A est un événement de probabilité 1, il est indépendant de tout événement B. En effet $\overline{A}$ est de probabilité nulle donc $\overline{A}$ et B sont indépendants, comme nous l'avons déjà vu. On en déduit que A et B sont indépendants.

Si A et B d'une part, A et C d'autre part sont indépendants, on ne peut rien affirmer sur l'indépendance des événements A et $B \cap C$ ou A et $B \cup C$.

438 **Exercice 19** On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».
Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais que A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants et que A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

438 **Exercice 20**

1. Montrer que, si les événements A et B d'une part, A et C d'autre part, sont indépendants et si $B \subset C$, alors A et $C \setminus B$ sont indépendants.
2. Montrer que, si pour $1 \leqslant i \leqslant n$, A et B_i sont indépendants et si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont incompatibles, alors A et $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ sont indépendants.

2 Indépendance d'une famille d'événements.

Définition 10

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **deux à deux indépendants** si, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

Comme nous pouvons le constater dans les exemples précédents, l'indépendance deux à deux des événements A, B et C ne nous permet pas de déterminer la probabilité de $A \cap B \cap C$. Nous sommes donc amenés à définir une notion d'indépendance plus forte que la précédente.

Définition 11

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **mutuellement indépendants** (ou simplement, **indépendants**) si, pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

1. Pour l'indépendance mutuelle, on dit, en général, indépendants.
2. L'indépendance de n événements ne dépend pas de l'ordre de ces événements. C'est une notion très forte qui demande de vérifier $2^n - 1$ égalités

(autant que de parties non vides I de $[\![1,n]\!]$). Il est rare qu'on ait à les vérifier directement. Soit l'indépendance des événements fait partie des hypothèses ; elle modélise des expériences aléatoires aux résultats indépendants. Soit elle est la conséquence de l'indépendance, connue, d'autres événements.

3. Si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants, comme on le voit en prenant pour I un ensemble à deux éléments.
   Mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exercice 19 de la page 1423.
4. Si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, pour tout ensemble d'indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n$, où $p \in \mathbb{N}^*$, les événements $A_{i_1}, A_{i_2},\dots, A_{i_p}$ sont indépendants.
5. Il résulte de la proposition 16 de la page 1422 que, si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont deux à deux indépendants, les événements $B_1,\dots,B_n$, où chaque B_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) est A_i ou $\overline{A_i}$, sont également deux à deux indépendants.
   Nous allons voir que cela est vrai également pour l'indépendance mutuelle.

Proposition 17

Si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, alors les événements $B_1,\dots,B_n$, où chaque B_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) est A_i ou $\overline{A_i}$, sont également mutuellement indépendants.

Démonstration page 1439

Principe de démonstration.

On commence par traiter le cas où $B_i = A_i$ pour tous les i de $[\![1,n]\!]$, sauf un.

Remarque On peut démontrer que, pour tout n-uplet $(A_1,\dots,A_n)$ d'événements mutuellement indépendants, tout événement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des événements $A_1,\dots,A_{n-1}$ ou de leurs contraires est indépendant de A_n. Plus généralement, si p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, tout événement B pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des événements $A_1,\dots,A_p$ ou de leurs contraires est indépendant de tout événement C pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des événements $A_{p+1},\dots,A_n$ ou de leurs contraires.

Nous nous contenterons de montrer un résultat très partiel.

Proposition 18

Pour tout n-uplet $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ d'événements indépendants et $p \in [\![1,n-1]\!]$, les événements $A_1 \cap \dots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$ sont indépendants. Il en est de même de $A_1 \cup \dots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$, de $A_1 \cap \dots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$, de $A_1 \cup \dots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$.

Démonstration page 1439

3 Modélisation d'expériences aléatoires indépendantes

L'indépendance des événements est en général une conséquence de la modélisation choisie. On construit l'espace probabilisé de sorte que deux expériences dont les résultats n'ont pas de lien de causalité entre eux (on parle d'expériences indépendantes) se traduisent par des événements indépendants (au sens mathématique).

- Supposons que l'on ait modélisé deux épreuves aléatoires $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ par les espaces probabilisés finis $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$. Alors on sait modéliser l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consistant en la succession des expériences indépendantes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
  En effet, on peut représenter un résultat des deux expériences comme un élément de $\Omega_1 \times \Omega_2$. De quelle probabilité $\mathbb{P}$ faut-il alors munir cet univers ?
  On peut remarquer que pour tout $A_1 \in \mathcal{P}(\Omega_1)$, A_1 et $A_1 \times \Omega_2$ représente le même événement, donc il paraît raisonnable de poser $\mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(A_1)$ et de même, pour tout $A_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2)$, $\mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$. L'indépendance des deux épreuves aléatoires se traduira par :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}\big((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)\big) &= \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2)\,\mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2)\\ &= \mathbb{P}_1(A_1)\,\mathbb{P}_2(A_2).\end{aligned}$$
  On peut montrer que ces relations suffisent à définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.
- Plus généralement, une succession de n expériences aléatoires indépendantes représentées par les espaces probabilisés $(\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sera modélisée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ et $\mathbb{P}$ est l'unique probabilité qui vérifie :
  $$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(\Omega_n) \quad \mathbb{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(A_n).$$

Épreuves répétées

Ce qui précède s'applique en particulier à une suite de n expériences identiques et indépendantes (on parle en général d'épreuves répétées). Si une épreuve est représentée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, la suite des n épreuves sera représentée par l'espace probabilisé $(\Omega^n, \mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}$ vérifie :
$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \big(\mathcal{P}(\Omega)\big)^n \quad \mathbb{Q}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n).$$
En particulier, pour $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$,
$$\mathbb{Q}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) \ldots \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$
C'est ainsi que l'on modélise le jeu de **pile ou face**. On dispose d'une pièce de monnaie qu'on lance n fois. On suppose que les résultats des différents lancers sont indépendants. Un lancer sera représenté par l'univers $\{1, 0\}$, où 1 représente

par exemple le résultat « pile » et 0 le résultat « face ». Il existe $p \in [0, 1]$ tel que la probabilité $\mathbb{P}$ sur $\{0, 1\}$ est définie par $\mathbb{P}(\{1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$. La suite de n lancers sera représentée par l'univers $\Omega = \{0, 1\}^n$, muni de la probabilité $\mathbb{Q}$.

Pour tout $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$, $\mathbb{Q}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Par exemple :

* la probabilité de l'événement « on obtient n piles » est p^n ;
* la probabilité de l'événement « on obtient dans cet ordre k piles puis $n-k$ faces » $(0 \leqslant k \leqslant n)$ est $p^k(1-p)^{n-k}$;
* la probabilité de l'événement « on obtient k piles et $n-k$ faces dans un ordre quelconque » $(0 \leqslant k \leqslant n)$ est $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ car c'est la réunion de $\binom{n}{k}$ événements incompatibles de même probabilité $p^k(n-p)^k$, correspondant aux différentes répartitions des k piles parmi les n lancers.

Plus généralement, on appelle **épreuve de Bernoulli** toute épreuve à deux issues, que l'on nomme en général succès et échec. Une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes est appelée **schéma de Bernoulli**. Tout schéma de Bernoulli peut être modélisé par $(\{0, 1\}^n, \mathbb{Q})$, où 1 représente un succès et 0 un échec.